

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

ADOLF HAIMOVICI

Etapa locală-9 februarie 2013

Filiera tehnologică: profilul tehnic

Barem clasa XI

1. Fie  $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  astfel încât  $X+Y=XY$ , pentru orice  $X, Y \in \{A, B, C, D\}$ . Să se arate că  $2(A+B+C+D)=ABCD$ .

**Soluție:**  $XY=X+Y=Y+X=YX$  deci matricele  $A, B, C, D$  comută între ele.....2p

$A+B=AB$ ,  $B+C=BC$ ,  $C+D=CD$ ,  $D+A=DA$ .....1p

Prin adunare  $2(A+B+C+D)=AB+BC+CD+DA$ .....1p

$=AB+BC+DC+DA=B(A+C)+D(A+C)=(B+D)(A+C)$ .....2p

$=(BD)(AC)=ABCD$ .....1p

2. Se consideră numerele reale  $a, b, c$ , funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + 2x + 3$  și

determinanții  $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$  și  $B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix}$ .

a) Să se arate că  $A=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ .

b) Să se arate că  $A=B$ .

c) Să se arate că, pentru orice trei puncte distincte, cu coordonate naturale, situate pe graficul funcției  $f$ , aria triunghiului cu vârfurile în aceste puncte este un număr natural divizibil cu 3.

**Soluție:**

a) Se folosesc proprietățile determinantilor.....2p

$$b) B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 + 2a + 3 & b^3 + 2b + 3 & c^3 + 2c + 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = A \dots\dots\dots 2p$$

$$c) A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\Delta| \text{ unde } \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = B = A$$

$$= \frac{1}{2} |(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)| \dots\dots\dots 1p$$

Se discută situațiile :  $a, b, c$  dau resturi diferite prin împărțire la 3.....1p

Două dintre numerele  $a, b, c$  dau același rest prin împărțire la 3 și toate dau același rest prin împărțire la 3.....1p

3. Să se calculeze următoarele limite:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2^x + 3^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$

**Soluție:**

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x (\sqrt{\cos x} + 1)} \dots\dots\dots 1p$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{(1 - \cos^2 x)(\sqrt{\cos x} + 1)} \dots\dots\dots 1p$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{(1+\cos x)(\sqrt{\cos x}+1)} = \frac{-1}{4} \dots\dots\dots 1p$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2^x + 3^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{2^x + 3^x - 2}{2} \right)^{\frac{1}{x}} \dots\dots\dots 1p$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{2^x + 3^x - 2}{2} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{2^x - 1 + 3^x - 1}{2} \cdot \frac{1}{x}} \dots\dots\dots 1p$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln 2 + \ln 3}{2}} = \sqrt{6} \dots\dots\dots 2p$$

4. Să se determine a,b,c numere reale astfel încât funcția  $f : \mathbb{R} - \{-c\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + c}$  să aibă ca asimptote drepte de ecuații  $x=1$  și  $y=x+2$  iar  
punctul  $P(2,6)$  să fie un punct al graficului.

**Soluție:** din  $x = 1$  asimptotă verticală se obține  $c = -1$ .....1p

Din  $y=x+2$  asimptotă oblică  $m=1$ ,  $n=2$ .....1p

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - x} = 1 \dots\dots\dots 1p$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x(a+1) + b}{x - 1} \right) = a + 1 \dots\dots\dots 2p$$

deci  $a=1$  și  $b \in \mathbb{R}$ .....1p

$$f(2)=6 \Rightarrow b = 0 \dots\dots\dots 1p$$